
Mémento de colorimétrie pour la vidéoprojection

Emmanuel Piat
epiat@ens2m.fr

17 janvier 2005

Avertissement

Ce document présente quelques notions fondamentales pour comprendre les espaces de couleur et la colorimétrie en vidéoprojection. Ces notions sont le résultat d'une compilation d'informations trouvées sur le net et de déductions personnelles. Je ne garantis donc en aucun cas leur exactitude. Ce document est associé au projet d'étalonnage vidéo du forum HomeCinema-fr.

En vertu des articles L 111-1 et L 335-3 du Code de la Propriété Intellectuelle (CPI) qui définit le droit de l'auteur, la reproduction partielle ou totale de ce document doit faire l'objet préalable d'une demande d'autorisation auprès de l'auteur et d'un accord de sa part. Cette clause ne s'applique pas aux figures dont l'origine est précisée.

1 Vidéoprojection et colorimétrie

Un vidéoprojecteur doit projeter les couleurs encodées sur le support vidéo sans les dénaturer. Il est donc important de pouvoir mesurer et régler la colorimétrie d'un vidéoprojecteur afin de s'assurer que les couleurs sont correctement reproduites. Le point de départ de cette démarche consiste à considérer le vidéoprojecteur comme une source lumineuse et de comprendre la manière dont elle est perçue par l'œil humain.

Les longueurs d'onde visibles par l'œil se situent entre 380 et 780 nanomètres. Le long de cette bande visible, il y a environ 128 couleurs pleinement saturées qui peuvent être distinguées par un œil humain. Lorsqu'on tient compte de la sensibilité de l'œil qui est différente selon les longueurs d'onde, on se place dans le cadre d'une discipline appelé *photométrie*. L'objectif de la photométrie est donc de mesurer la lumière d'une manière telle que le résultat de la mesure exprime de façon précise la sensation visuelle d'un observateur humain. Si de plus, on s'attache à la caractérisation des couleurs perçues par un être humain, on parle alors de colorimétrie.

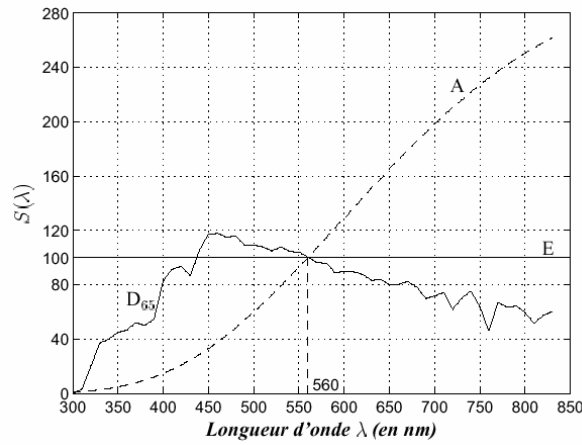


FIG. 1 – Distributions spectrales d'énergie des illuminants A, E et D₆₅. Extrait de [http ://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html](http://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html)

2 Source lumineuse

Les sources lumineuses se caractérisent par leur *distribution spectrale d'énergie*, c'est-à-dire la quantité d'énergie $E(\lambda)$ émise par intervalle de longueurs d'onde $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. Une source lumineuse est donc caractérisée par $E(\lambda)$ avec λ compris entre $\lambda_1 = 380$ nm et $\lambda_2 = 780$ nm. Le tracé de $E(\lambda)$ en fonction de λ constitue le spectre de la source.

Certaines sources correspondant à des conditions d'observation courantes ont été normalisées par la CIE (Commission Internationale de l'Eclairage) sous le nom d'*illuminants*. A chaque illuminant correspond donc un spectre $E(\lambda)$ donné (pas forcément réalisable physiquement). Par exemple l'illuminant A correspond à la lumière émise par un corps noir (cf. section 3) porté à la température de 2856K. La source associée à cet illuminant théorique est une lampe à filament de tungstène de 500W qui a une température de couleur proximale de 2856K.

Une caractéristique d'un illuminant ou d'une source lumineuse est sa température de couleur (ou température de couleur proximale) qui sera expliquée dans la section suivante. Les illuminants qui nous intéresseront par la suite sont D₆₅ et E. D₆₅ représente la lumière du jour à une température de couleur proximale de 6504K. E correspond à une source équi-énergétique (cf. figure 1).

3 Température de couleur

Un corps noir est un corps qui émet un rayonnement spectral $E(\lambda)$ donné lorsqu'il est dans un état d'équilibre caractérisé par une température interne T . Ce rayonnement E à chaque longueur d'onde λ est caractérisé par la loi de Planck qui donne E en fonction

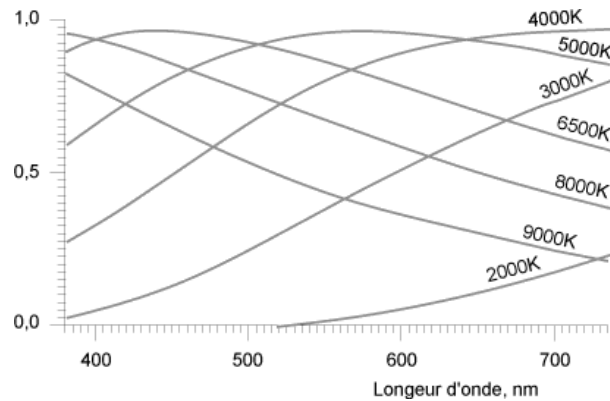


FIG. 2 – Distributions spectrales d'énergie du corps noir à différentes températures. Extrait de [http ://www.cst.fr/dtech/07-mai98/index.html](http://www.cst.fr/dtech/07-mai98/index.html)

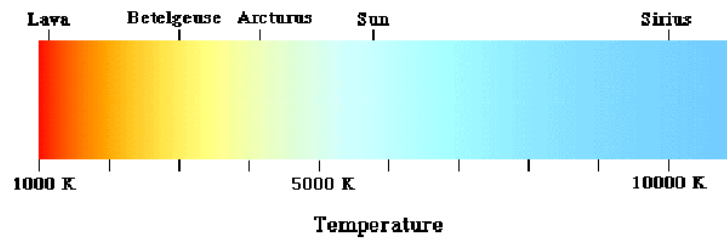


FIG. 3 – Température de surface et couleur de quelques étoiles. Extrait de [http ://www.mat.univie.ac.at/kriegl/Skripten/CG/node10.html](http://www.mat.univie.ac.at/kriegl/Skripten/CG/node10.html)

de λ et de T . Le corps noir est un corps physique hypothétique (c'est un modèle) car il absorbe complètement l'énergie qu'il reçoit sans que cela ne modifie son état d'équilibre en température. Néanmoins les étoiles sont de bonnes approximations du corps noir. La figure 2 illustre les spectres de rayonnement du corps noir qu'on obtient lorsqu'il est porté à différentes températures.

Le spectre émis par un corps noir à la température T va être perçu comme une couleur par un observateur humain. En fonction de T , cette couleur va varier du rouge au bleu et correspond à la gamme de couleurs des étoiles. Par exemple la couleur du soleil correspond à celle d'un corps noir à 5800K (cf. figure 3). La notion de température de couleur n'est donc valable que pour les couleurs associées aux différents spectres possibles $E(\lambda)$ du corps noir.

Si on représente la couleur du corps noir perçu par un observateur standard dans le diagramme de chromaticité CIE-xy (cf. section 11.1) et qu'on fait varier la température T du corps noir, on obtient *la courbe du corps noir* allant du rouge au bleu en passant par le blanc. La figure 4 représente cette courbe pour des températures du corps noir allant de 2000K à 25000K.

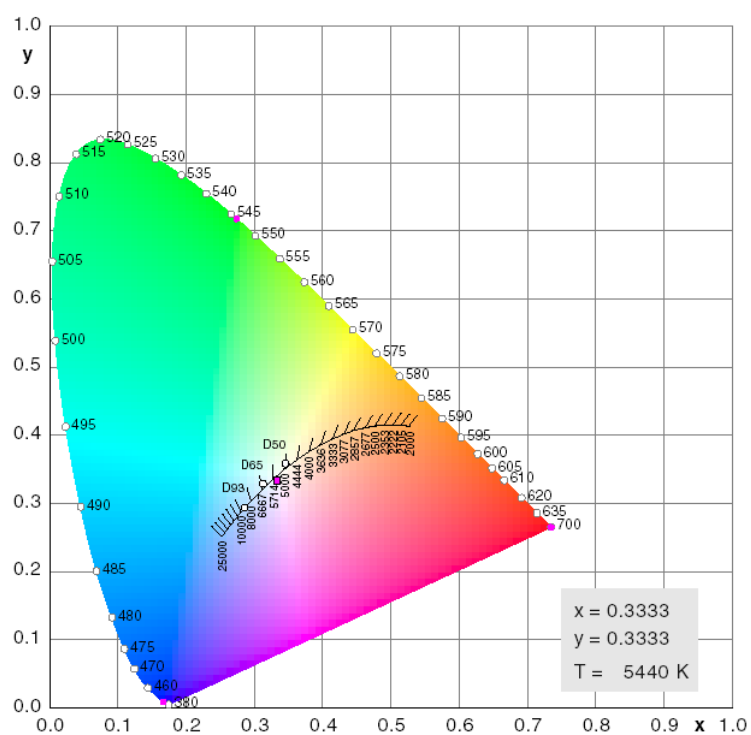


FIG. 4 – Courbe du corps noir dans le diagramme de chromaticité CIE-xy. Extrait de [http ://www.fho-emden.de/ hoffmann/howww41a.html](http://www.fho-emden.de/~hoffmann/howww41a.html)

4 Température de couleur proximale

Toutes les sources lumineuses ne sont pas des corps noirs. Le point P associé à la couleur d'une source dans le diagramme CIE-xy ne va donc pas forcément tomber sur la courbe du corps noir. Dans ce cas, on définit la température de couleur proximale (ou Correlated Color Temperature CCT) de la source en projetant le long d'une courbe "ISO-CCT" le point P sur la courbe du corps noir. Le point obtenu donne alors la température de couleur proximale (CCT) de la source lumineuse. L'algorithme classique de calcul de la CCT utilise une interpolation linéaire pour la projection et n'est valable que si la couleur de la source lumineuse n'est pas trop éloignée de la courbe du corps noir.

5 Perception de la couleur d'une source par l'œil humain

La perception de la couleur d'une source est un phénomène neuro et psycho-physiologique complexe qui fait notamment intervenir la composition spectrale de la source, les récepteurs de l'œil et les aires visuelles de notre cerveau qui analysent et interprètent ces signaux. Les couleurs ne sont qu'une « matérialisation sensitive » propre à l'être humain des ondes électromagnétiques qui nous entourent. La couleur est donc une notion subjective qui diffère d'un individu à l'autre. On notera les couleurs perçues entre crochets : la couleur perçue induite par le spectre de rayonnement $E(\lambda)$ sera notée $[E]$.

Le modèle tri-stimulus est un modèle élémentaire qui rend compte de la perception colorimétrique d'un individu standardisé au niveau de la *rétine*. Il existe cependant d'autres modèles beaucoup plus complexes qui permettent d'expliquer plus en détails la perception humaine des couleurs et notamment les traitements fait par le cortex visuel. Néanmoins, pour la plupart des applications en colorimétrie, le modèle tri-stimulus est suffisant.

La caractérisation de la colorimétrie d'un vidéoprojecteur utilise une source lumineuse suffisamment intense pour qu'on puisse supposer que l'œil réagit comme en vision diurne (vision photopique). Le modèle tri-stimulus s'explique dans ce cas par les 3 types de cônes de l'œil : les cônes S sensibles à des longueurs d'onde courtes (short), les cônes M sensibles à des longueurs d'onde moyennes (medium) et les cônes L sensibles à des longueurs d'onde longues (long).

Les cônes L sont sensibles au jaune-vert à rouge, les cônes M au vert et les cônes S au bleu. La répartition des cônes est la suivante : 64% pour les L, 32% pour les M et seulement 2% pour les bleus (qui sont néanmoins beaucoup plus sensibles que les autres). Si $S_1(\lambda)$, $S_2(\lambda)$ et $S_3(\lambda)$ représentent les sensibilités spectrales relatives des cônes L, M et S (cf. figure 5) alors la réponse des trois types de cônes à une source de spectre $E(\lambda)$

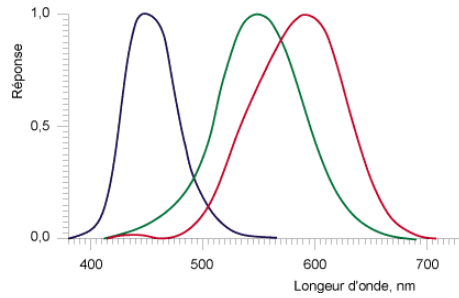


FIG. 5 – Courbes de sensibilité relative (normalisée) des trois types de cônes. Extrait de <http://www.cst.fr/dtech/07-mai98/index.html>

est :

$$\begin{aligned}
 r_1(E) &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_1(\lambda) E(\lambda) d\lambda \\
 r_2(E) &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_2(\lambda) E(\lambda) d\lambda \\
 r_3(E) &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S_3(\lambda) E(\lambda) d\lambda
 \end{aligned} \tag{1}$$

Cette réponse peut être notée de manière vectorielle $r(E) = [r_1(E) \ r_2(E) \ r_3(E)]^t$.

D'après (1), l'œil ne permet pas au cerveau de reconstruire le spectre $E(\lambda)$. Il fournit au cerveau une puissance moyenne associée à l'ensemble du spectre car pondérée par la sensibilité des cônes à chaque longueur d'onde λ . Deux spectres différents peuvent donc produire une même réponse au niveau de cônes. *Deux spectres différents pourront donc déclencher la perception par le cerveau d'une même couleur.* Il en résulte les propriétés de métamérisme : pour égaler une couleur, il n'est pas nécessaire de reconstituer sa composition spectrale et deux spectres lumineux $E_1(\lambda)$ et $E_2(\lambda)$ donnant la même impression colorée sont dits métamères. C'est grâce à cette propriété qu'un vidéoprojecteur va pouvoir reconstituer les couleurs encodées sur le support vidéo.

6 Introduction à la théorie trichromatique

Pour associer au vecteur $r(E)$ une notion subjective de couleur, puis d'espace de couleur, on fait appel à l'expérience subjective d'égalisation des couleurs qui utilise la notion de synthèse additive des couleurs. La synthèse additive correspond à l'addition de couleurs appelées *primaires*. La synthèse additive peut être réalisée :

- par juxtaposition (c'est ce qui se passe dans le cas des tri-tubes, des tri-LCD, des tri-DLP et des DILA),
- par intégration temporelle (c'est ce qui se passe dans le cas de mono-DLP).

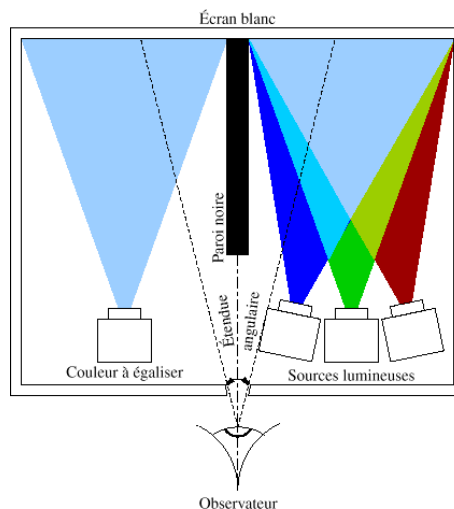


FIG. 6 – Expérience d'égalisation de couleurs. Extrait de [http ://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html](http://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html)

La théorie trichromatique postule que toute couleur perçue $[E]$ associée à une distribution spectrale d'énergie $E(\lambda)$ peut être reproduite par le mélange de trois autres couleurs appelées *primaires*. C'est la première loi de la colorimétrie :

Toute couleur peut être créée par un mélange de 3 couleurs convenablement choisies et mélangées en proportions convenables.

Cette loi est vérifiée par l'expérience d'égalisation des couleurs où un observateur observe simultanément dans son champ de vision la couleur $[E]$ à égaliser et un mélange additif des trois primaires $[A]$, $[B]$ et $[C]$ (cf. figure 6). En modifiant la quantité a , b et c de lumière produite par les primaires, l'observateur cherche alors à égaliser la couleur $[E]$ qu'il perçoit avec le mélange de $[A]$, $[B]$ et $[C]$. Lorsque l'observateur estime qu'il y a juxtaposition parfaite, on écrit :

$$[E] \equiv a[A] + b[B] + c[C] \quad (2)$$

où $+$ signifie synthèse additive et \equiv signifie égalité de couleurs perçues. Les modifications a , b et c correspondent à une pondération des spectres des primaires $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ et $C(\lambda)$ par un scalaire compris entre 0 et 1. Notons que les spectres $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ et $C(\lambda)$ n'ont pas obligation d'être des spectres monochromatiques.

Pour résumer, le spectre $E(\lambda)$ engendre le vecteur de réponse $r(E)$ au niveau des cônes de l'œil qui induit la perception subjective d'une couleur $[E]$ par le cerveau et cette perception peut être reproduit par un mélange des couleurs $[A]$, $[B]$ et $[C]$.

Parvenu à ce point, il convient de noter que si les couleurs $[A]$, $[B]$ et $[C]$ sont fixées, rien ne permet d'affirmer que toute couleur sera possible à atteindre par synthèse additive et ce n'est d'ailleurs pas le cas en vidéoprojection. Les primaires d'un vidéoprojecteur

sont perçues par un observateur comme les couleurs $[R]$, $[G]$ et $[B]$ et ne permettent en aucun cas de reconstituer la totalité des couleurs perceptibles par un être humain. L'ensemble des couleurs que peut reproduire le vidéoprojecteur par synthèse additive de $[R]$, $[G]$ et $[B]$ est appelé le *gamut* du vidéoprojecteur.

Pour pouvoir obtenir la totalité des couleurs perceptibles par un être humain à l'aide de $[A]$, $[B]$ et $[C]$ il serait nécessaire d'avoir des coefficients a , b et c qui deviennent négatifs. Comme ceci n'est pas réalisable en pratique, on vérifie ce point en égalisant par exemple $[E] + a[A]$ avec $b[B] + c[C]$:

$$[E] + a[A] \equiv b[B] + c[C] .$$

Ce cas revient alors à dire que :

$$[E] \equiv -a[A] + b[B] + c[C] .$$

cette équivalence des deux écritures est rendue possible grâce aux lois de Grassman :

- l'égalité des couleurs perçues subsiste si on change les quantités de lumière dans de larges proportions : si $a[A] \equiv b[B]$ alors $ka[A] \equiv kb[B]$,
- si on ajoute un flux coloré à deux mélanges égalisés, l'égalité persiste : si $a[A] \equiv b[B]$ alors $a[A] + c[C] \equiv b[B] + c[C]$,
- si $a[A] \equiv b[B]$ et $b[B] \equiv c[C]$ alors $a[A] \equiv c[C]$.

En général, on est plus intéressé par les *rapports de proportion* entre a , b et c que par les niveaux absolus d'intensité a , b et c . Ces coefficients vont donc être normalisés en utilisant un blanc de référence $[W]$ obtenu avec les primaires $[A]$, $[B]$ et $[C]$. Ce blanc de référence a un spectre de rayonnement $W(\lambda)$. Si a_W , b_W et c_W sont les quantités nécessaires pour obtenir ce blanc $[W]$ par synthèse additive :

$$[W] \equiv a_W[A] + b_W[B] + c_W[C] \tag{3}$$

On pose alors :

$$A_c = \frac{a}{a_W} \quad B_c = \frac{b}{b_W} \quad C_c = \frac{c}{c_W} \tag{4}$$

Les valeurs A_c , B_c et C_c sont appelées composantes trichromatiques (tri-stimulus values). Ce sont des composantes relatives au blanc de référence $[W]$. Ces composantes ne sont donc utiles que si on connaît le blanc de référence $[W]$ car elles changent si on change de blanc de référence. Si on pose :

$$[A_c] \equiv a_W[A] \quad [B_c] \equiv b_W[B] \quad [C_c] \equiv c_W[C] \tag{5}$$

on a :

$$[E] \equiv A_c[A_c] + B_c[B_c] + C_c[C_c] . \tag{6}$$

Autrement dit, les composantes trichromatiques A_c , B_c et C_c correspondent au mélange des nouvelles *primaires trichromatiques* $[A_c]$, $[B_c]$, $[C_c]$ nécessaire pour obtenir la couleur

$[E]$. Dans (6), il ne faut pas confondre A_c qui est un scalaire (positif ou négatif) et $[Ac]$ qui est une couleur dérivée de la primaire $[A]$ en recalant son intensité par rapport au blanc de référence. Une conséquence de l'ensemble de ces propriétés est alors que toute couleur peut être représentée par un point associé aux composantes trichromatiques dans un espace à trois dimensions appelé *espace de couleurs* pour lequel on a défini un blanc de référence. Pour ce faire, on va remplacer l'écriture d'équivalence (2) par un formalisme mathématique approprié.

7 Formalisme de la théorie trichromatique

Si on appelle les primaires P_1 , P_2 et P_3 et les trois types de cônes de l'œil S_1 , S_2 et S_3 , le système visuel et le système de couleur sont décrits par :

- les trois sensibilités spectrales $S_i(\lambda)$ des cônes ($i = 1, 2, 3$),
- les trois primaires ayant une distribution spectrale d'énergie $P_i(\lambda)$, ($i = 1, 2, 3$) auxquelles est associé un blanc de référence $[W]$ de spectre $W(\lambda)$.

7.1 Cas d'un spectre quelconque

On juxtapose la couleur $[E]$ perçue à partir du spectre d'énergie $E(\lambda)$ avec la couleur $[E']$ obtenue par un mélange des trois primaires. Le spectre $E'(\lambda)$ de la couleur $[E']$ est donc donné par¹ :

$$E'(\lambda) = \sum_{i=1}^3 c_i(E) P_i(\lambda) \quad \forall \lambda \in \{380, \dots, 780\} \quad (7)$$

où $c_i(E)$ est un scalaire représentant l'intensité de la couleur primaire $[P_i]$ nécessaire pour obtenir la juxtaposition de la couleur $[E']$ avec $[E]$.

Nous aurons défini une théorie trichromatique si nous sommes capables de déterminer par le calcul les trois coefficients $c_i(E)$ à partir des données de base qui sont les sensibilités $S_i(\lambda)$ des cônes et le spectre $E(\lambda)$. La réponse de chacun des cônes vis-à-vis du spectre $E(\lambda)$ est d'après (1) :

$$r_i(E) = \int_{\lambda} S_i(\lambda) E(\lambda) d\lambda \quad (8)$$

¹Ceci n'est vrai que pour les sources de lumière incohérentes. Dans ce cas, la distribution spectrale d'énergie d'un mélange de n sources lumineuses est la somme des n distributions spectrales d'énergie de chaque source. Les lampes des vidéoprojecteurs sont des sources de lumière incohérentes.

et leurs réponses au spectre $E'(\lambda)$ est :

$$\begin{aligned}
r_i(E') &= \int_{\lambda} S_i(\lambda) E'(\lambda) d\lambda \\
&= \int_{\lambda} S_i(\lambda) \left(\sum_{j=1}^3 c_j(E) P_j(\lambda) \right) d\lambda \quad \text{avec (7)} \\
&= \sum_{j=1}^3 c_j(E) \int_{\lambda} S_i(\lambda) P_j(\lambda) d\lambda \\
&= \sum_{j=1}^3 c_j(E) r_i(P_j)
\end{aligned} \tag{9}$$

où $r_i(P_j)$ est la réponse du type de cône S_i au spectre de la primaire P_j :

$$r_i(P_j) = \int_{\lambda} S_i(\lambda) P_j(\lambda) d\lambda .$$

Le fait que les couleurs $[E]$ et $[E']$ soient perçues de manière identique impose que la réponse des cônes aux spectres $E(\lambda)$ et $E'(\lambda)$ est la même (c'est le postulat de la théorie trichromatique). Comme ces réponses sont données par (8) et (9), on a :

$$\sum_{j=1}^3 c_j(E) r_i(P_j) = \int_{\lambda} S_i(\lambda) E(\lambda) d\lambda \quad i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Dans le système de trois équations ci-dessus, le spectre $E(\lambda)$ de la source E et la réponse scalaire $r_i(P_j)$ de chaque type de cônes aux primaires P_j sont connus ou calculables (données du problème). On a donc trois équations à trois inconnues $c_1(E)$, $c_2(E)$ et $c_3(E)$. Les coefficients $c_j(E)$ sont par conséquent calculables et spécifient en quelles *proportions absolues* il faut mélanger les primaires P_i pour obtenir la couleur $[E]$:

$$[E] \equiv [E'] \quad \text{avec} \quad E'(\lambda) = \sum_{i=1}^3 c_i(E) P_i(\lambda)$$

La théorie tri-chromatique permet ainsi de « décrire » formellement n'importe qu'elle couleur $[E]$ associée à un spectre $E(\lambda)$ à partir de trois primaires $[P_1]$, $[P_2]$ et $[P_3]$. Cette construction théorique peut sembler étrange car pour décrire la couleur $[E]$, on utilise un spectre $E'(\lambda)$ généralement différent de $E(\lambda)$ mais les deux sont alors métamères. Ainsi $[E]$ et $[E']$ correspondent bien à la même couleur. C'est le fait qu'on veuille décrire une couleur à partir de primaires qui impose cette démarche. La description de la couleur $[E]$ se fait alors à l'aide des trois scalaires $c_i(E)$ associés au spectre $E'(\lambda)$ et calculables en résolvant un système de trois équations. Comme la théorie trichromatique s'intéresse à la manière dont est perçue une couleur par un être humain, le calcul formel des scalaires $c_i(E)$ dépend de la sensibilité des trois types de cônes de l'œil humain (et aussi des conditions d'observation) .

7.2 Composantes trichromatiques

Si on s'intéresse maintenant en quelles *proportions relatives* il faut mélanger les primaires, il faut définir une valeur de référence qui va être le blanc de référence $[W]$ de spectre $W(\lambda)$. Les composantes trichromatiques qui décrivent la couleur $[E]$ à partir des primaires $[P_1]$ $[P_2]$ $[P_3]$ et du blanc de référence $[W]$ sont alors définies par :

$$t_i(E) = \frac{c_i(E)}{c_i(W)} \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

où les $c_i(W)$ sont les proportions des primaires nécessaires pour observer le blanc $[W]$:

$$[W] \equiv [W'] \quad \text{avec} \quad W'(\lambda) = \sum_{i=1}^3 c_i(W) P_i(\lambda)$$

On peut noter d'après (11) que par définition $t_i(W) = 1$. *Les composantes trichromatiques du blanc de référence valent toujours 1.*

Si on suppose les $c_i(W)$ connus, en reportant (11) dans (10), on obtient le nouveau système de trois équations à trois inconnues $t_j(E)$:

$$\sum_{j=1}^3 t_j(E) c_j(W) r_i(P_j) = \int_{\lambda} S_i(\lambda) E(\lambda) d\lambda \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

7.3 Cas d'un spectre monochromatique

Si la couleur $[E]$ à obtenir par synthèse additive correspond à un spectre monochromatique $E(\lambda)$ contenant une seule longueur d'onde λ' d'énergie unitaire, le spectre de E est un dirac en λ' :

$$E(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda').$$

Si on note dans ce cas $t_j(\lambda')$ les composantes trichromatiques $t_j(E)$ à calculer, le système de trois équations (12) à résoudre pour déterminer les trois coefficients $t_j(\lambda')$ devient :

$$\sum_{j=1}^3 t_j(\lambda') c_j(W) r_i(P_j) = \int_{\lambda} S_i(\lambda) E(\lambda) d\lambda \quad (13)$$

$$= \int_{\lambda} S_i(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') d\lambda \quad (14)$$

$$= S_i(\lambda') \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

où $S_i(\lambda')$ est la sensibilité en λ' des cônes de type S_i .

7.4 Fonctions colorimétriques

Les trois fonctions $t_j(\lambda)$ sont appelées *fonctions colorimétriques* ou en anglais *spectral matching curves* ou encore *color matching functions* (CMF). Si on connaît la valeur de ces trois fonctions pour chaque longueur d'onde λ alors il est possible de calculer *directement* les composantes trichromatiques d'une couleur $[E]$ à partir de son spectre. En effet, pour un spectre $E(\lambda)$ quelconque, il est possible de remplacer dans la relation (12) le terme $S_i(\lambda)$ dans le membre de droite par sa valeur fournie à l'aide de l'équation (15) :

$$S_i(\lambda) = \sum_{j=1}^3 t_j(\lambda) c_j(W) r_i(P_j) \quad (16)$$

Ceci revient en fait à dire qu'un spectre quelconque peut se décomposer en une superposition de spectres monochromatiques. On obtient donc en recopiant (12) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 t_j(E) c_j(W) r_i(P_j) &= \int_{\lambda} S_i(\lambda) E(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\lambda} \left(\sum_{j=1}^3 t_j(\lambda) c_j(W) r_i(P_j) \right) E(\lambda) d\lambda \quad \text{avec (16)} \\ &= \sum_{j=1}^3 c_j(W) r_i(P_j) \int_{\lambda} t_j(\lambda) E(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

C'est-à-dire en changeant l'ordre des termes :

$$\sum_{j=1}^3 c_j(W) r_i(P_j) t_j(E) = \sum_{j=1}^3 c_j(W) r_i(P_j) \int_{\lambda} t_j(\lambda) E(\lambda) d\lambda$$

De cette égalité, on déduit :

$$t_j(E) = \int_{\lambda} t_j(\lambda) E(\lambda) d\lambda \quad \forall j = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Cette relation est absolument fondamentale car elle donne chacune des trois composantes trichromatiques $t_j(E)$ qui décrivent la couleur $[E]$ à partir du spectre $E(\lambda)$ et de la valeur des fonctions colorimétriques $t_j(\lambda)$ pour chaque λ . A titre d'exemple, la figure 7 représente les trois fonctions colorimétriques notées :

$$\begin{aligned} t_1(\lambda) &= R_c(\lambda) \\ t_2(\lambda) &= G_c(\lambda) \\ t_3(\lambda) &= B_c(\lambda) \end{aligned}$$

associées aux primaires $[R_c]$, $[G_c]$ et $[B_c]$ et au blanc de référence l'illuminant E (spectre équi-énergétique) de l'espace colorimétrique CIE-RGB qui sera décrit dans la section

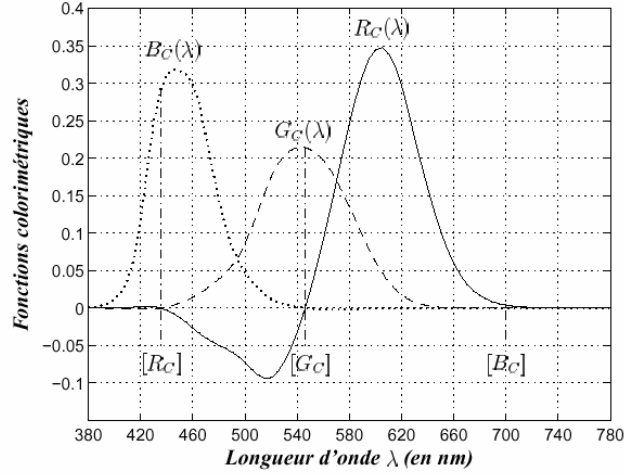


FIG. 7 – Fonctions colorimétriques $R_c(\lambda)$, $G_c(\lambda)$ et $B_c(\lambda)$ de l'espace colorimétrique CIE-RGB. Extrait de <http://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html>

10. On peut remarquer que certaines valeurs de $R_c(\lambda)$ sont négatives. Avec ces trois fonctions colorimétriques, les composantes trichromatiques de la couleur $[E]$ notées R_c , G_c et B_c seront d'après (17) :

$$\begin{aligned} t_1(E) = R_c &= \int_{\lambda} R_c(\lambda) E(\lambda) d\lambda \\ t_2(E) = G_c &= \int_{\lambda} G_c(\lambda) E(\lambda) d\lambda \\ t_3(E) = B_c &= \int_{\lambda} B_c(\lambda) E(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

8 Luminance

La luminance d'une source lumineuse de spectre $E(\lambda)$ est donnée par :

$$Y = \int_{\lambda} V(\lambda) E(\lambda) d\lambda . \quad (18)$$

La fonction $V(\lambda)$ (cf. figure 8) est la fonction d'efficacité lumineuse relative spectrale de l'œil. Elle est maximale et vaut 1 pour $\lambda = 555$ nm (couleur verte). $V(\lambda)$ traduit la capacité des longueurs d'onde à exciter l'œil et à produire la sensation humaine de luminosité.

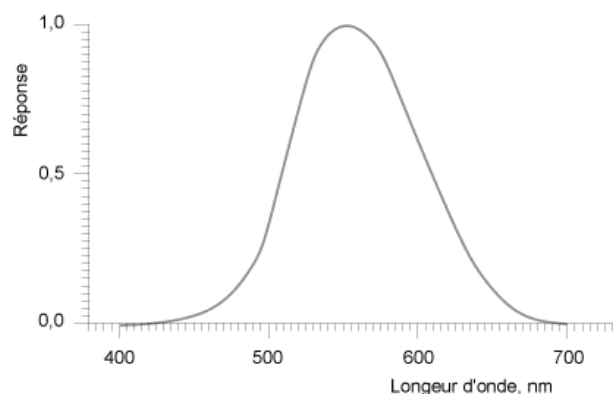


FIG. 8 — Fonction d'efficacité lumineuse spectrale $V(\lambda)$. Extrait de <http://www.cst.fr/dtech/07-mai98/index.html>

9 Espaces de représentation des couleurs

D'après la section 7.2, des triplets de primaires A , B et C et des blancs de référence W différents vont donner des composantes trichromatiques différentes. Comme un espace de couleur est un espace tridimensionnel qui permet de représenter les trois coordonnées des composantes trichromatiques, il va donc exister une infinité d'espaces de représentation des couleurs (autant que de triplets de primaires et de blancs possibles).

De plus, on a vu que le calcul des composantes trichromatiques dépend de la sensibilité des trois types de cônes de l'oeil humain. Comme cette sensibilité varie selon les individus, il a été défini par la CIE un *observateur standard* qui est un observateur de référence parfaitement connu. Cet observateur a été défini sur une base statistique en établissant les fonctions colorimétriques d'un espace colorimétrique de référence (l'espace CIE-RGB) pour un certain nombre d'individus avec une vision « normale » puis en faisant une moyenne des fonctions obtenues. Tous les autres espaces de couleurs classiques ont ensuite été dérivés mathématiquement à partir de l'espace de référence CIE-RGB car il est toujours possible de passer d'un espace à un autre par une transformation mathématique.

9.1 Construction d'un espace de couleur

Soient trois primaires A , B et C et un blanc W de référence. Chaque couleur $[E]$ et le blanc $[W]$ correspondent aux synthèses additives :

$$\begin{aligned}[E] &\equiv a_E[A] + b_E[B] + c_E[C] \\ [W] &\equiv a_W[A] + b_W[B] + c_W[C]\end{aligned}$$

Si les trois primaires A , B , C sont linéairement indépendantes² on peut alors leur associer trois vecteurs linéairement indépendants \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} de \mathbb{R}^3 et il est possible de représenter la couleur $[E]$ par le vecteur \vec{E} défini par :

$$\vec{E} = a_E \vec{A} + b_E \vec{B} + c_E \vec{C} . \quad (19)$$

À cette étape du processus de construction, le choix des vecteurs \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} importe peu du moment qu'ils forment une base. La seule chose importante est que, exprimées dans cette base, les composantes de \vec{E} sont $[a_E \ b_E \ c_E]^t$. Notons que cette base peut être représentée comme étant orthogonale ou pas. Là encore, ce n'est qu'un choix de représentation.

Pour construire l'espace de couleur (tristimulus space) associé aux primaires A , B , C et à W , on va considérer les composantes trichromatiques associées à $[E]$:

$$A_c = \frac{a_E}{a_W} \quad B_c = \frac{b_E}{b_W} \quad C_c = \frac{c_E}{c_W} . \quad (20)$$

et on va définir trois nouveaux vecteurs \vec{A}_c , \vec{B}_c , \vec{C}_c de \mathbb{R}^3 colinéaires à \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} par :

$$\vec{A}_c = a_W \vec{A} , \quad \vec{B}_c = b_W \vec{B} , \quad \vec{C}_c = c_W \vec{C} . \quad (21)$$

La couleur associée à \vec{A}_c est évidemment :

$$[A_c] \equiv a_W \cdot [A]$$

La couleur $[A_c]$ correspond à la primaire $[A]$ dont l'intensité a été poussée au maximum par rapport au blanc de référence. Il en est de même pour les couleurs $[B_c]$ et $[C_c]$. Avec (19) et (20), on peut alors écrire³ :

$$\vec{E} = A_c \vec{A}_c + B_c \vec{B}_c + C_c \vec{C}_c . \quad (22)$$

Autrement dit, dans la *base trichromatique* $(\vec{A}_c, \vec{B}_c, \vec{C}_c)$, on a :

$$\vec{E} = [A_c \ B_c \ C_c]^t \quad (23)$$

Si on représente le noir par le point $O(0, 0, 0)$, on peut alors définir le repère $(O, \vec{A}_c, \vec{B}_c, \vec{C}_c)$ qui va permettre de représenter chaque couleur $[E]$ par un point $E(A_c, B_c, C_c)$ (cf. figure 9). Le blanc $[W]$ correspond ainsi au point de coordonnées $W(1, 1, 1)$. *Comme on ne peut pas avoir de composantes trichromatiques plus blanc que blanc, les trois composantes A_c , B_c , C_c de chaque couleur réalisable sont forcément inférieures à 1.*

²Linéairement indépendant signifie ici qu'aucune des trois primaires ne peut être obtenues comme un mélange des deux autres. Cette condition est nécessaire pour que le système (10) ait une solution.

³Il ne faut pas confondre la composante trichromatique A_c qui est un scalaire avec \vec{A}_c qui est un vecteur de base. Utiliser les mêmes notations dans les deux cas n'est pas forcément un choix heureux mais c'est malheureusement une écriture répandue en colorimétrie. C'est pourquoi j'ai pris garde à mettre une flèche sur chaque vecteur.

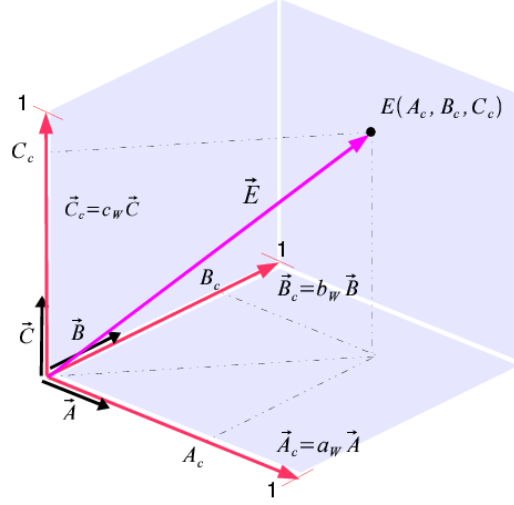


FIG. 9 – Représentation d’une couleur par un point dans le repère $(O, \vec{A}_c, \vec{B}_c, \vec{C}_c)$

Comme on a :

$$[A] \equiv 1.[A] + 0.[B] + 0.[C] \quad \Rightarrow \quad a_E = 1 \quad \Rightarrow \quad A_c = \frac{1}{a_W}$$

on en déduit d’après (22) :

$$\vec{A} = \frac{1}{a_W} \cdot \vec{A}_c + 0 \cdot \vec{B}_c + 0 \cdot \vec{C}_c; .$$

Par conséquent, les composantes trichromatiques des primaires A, B, C sont :

$$A\left(\frac{1}{a_W}, 0, 0\right) \quad B\left(0, \frac{1}{b_W}, 0\right) \quad C\left(0, 0, \frac{1}{c_W}\right) . \quad (24)$$

Celles des couleurs associées aux vecteurs de base trichromatique $\vec{A}_c, \vec{B}_c, \vec{C}_c$ sont évidemment :

$$A_c(1, 0, 0) \quad B_c(0, 1, 0) \quad C_c(0, 0, 1) . \quad (25)$$

Autrement dit, une composante trichromatique est égale à 1 chaque fois que la primaire correspondante voit son intensité poussée au maximum par rapport au blanc de référence. Si certains points ont des composantes négatives, cela signifie que les couleurs correspondantes ne sont pas réalisables physiquement par synthèse additive à l’aide des primaires considérées.

9.2 Coordonnées trichromatiques

Si on fait varier l’intensité d’une couleur $[E]$ définie par :

$$[E] \equiv a_E[A] + b_E[B] + c_E[C] ,$$

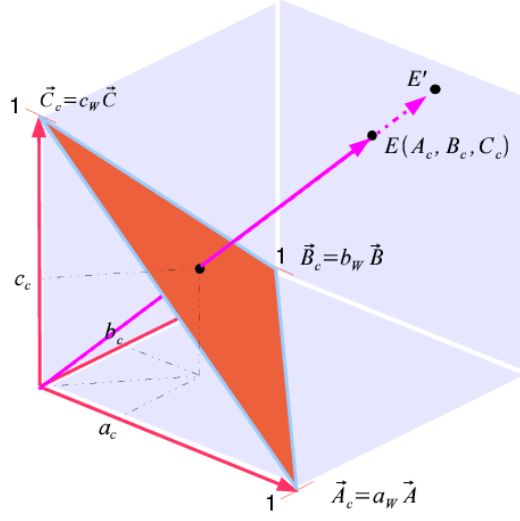


FIG. 10 – Invariance du chroma et triangle de Maxwell

on obtient d'après les lois de Grassman, de nouvelles couleurs $[E']$ définies par :

$$[E'] \equiv \alpha[E] \equiv \alpha a_E[A] + \alpha b_E[B] + \alpha c_E[C] .$$

Dans le schéma de la figure 10, ces couleurs sont toutes situées sur la droite passant par O et colinéaire au vecteur \vec{E} . Toutes ces couleurs $[E']$ ont des flux lumineux (puissance) proportionnels et on dit alors qu'elles ont toutes la même *chrominance* (en anglais *chromaticity*) bien qu'elles puissent provoquer des sensations de couleurs différentes (par exemple $[E']$ pourra être un jaune rougeâtre, puis un orange, puis un orange pâle puis un marron). La seule chose qui les distingue est leur intensité lumineuse. Il est alors d'usage de spécifier des espaces de couleurs dans lesquels ces couleurs $[E]$ ont toutes les mêmes coordonnées qu'on appelle *coordonnées trichromatiques* (en anglais *chromaticity coordinates* ou *trichromatic coordinates*).

Ces coordonnées trichromatiques sont définies à partir des composantes trichromatiques par :

$$a_c = \frac{A_c}{A_c + B_c + C_c} \quad b_c = \frac{B_c}{A_c + B_c + C_c} \quad c_c = \frac{C_c}{A_c + B_c + C_c} . \quad (26)$$

La transformation ainsi définie correspond à la projection du point $E(A_c, B_c, C_c)$ sur le plan d'équation :

$$A_c + B_c + C_c = 1$$

matérialisé par un triangle (triangle de Maxwell) sur la figure 10. Ce plan s'appelle plan de Maxwell. On peut facilement vérifier qu'avec cette transformation, toutes les couleurs $[E'] \equiv \alpha[E]$ ont bien toutes les mêmes composantes trichromatiques (α se simplifie dans chaque fraction). Dans ce plan, comme chaque couleur vérifie :

$$a_c + b_c + c_c = 1$$

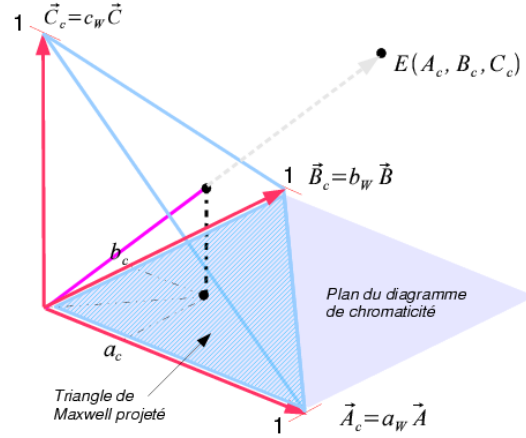


FIG. 11 – Projection de la chrominance sur le diagramme de chromaticité

deux composantes suffisent pour décrire la chrominance d'une couleur, la troisième se déduisant des deux autres. Notons que les couleurs impossibles à réaliser par synthèse additive des primaires ont forcément une chrominance située à l'extérieur du triangle à cause des composantes trichromatiques négatives de ces couleurs (le vecteur \vec{E} n'intersecte pas le triangle de Maxwell).

Le noir n'a pas de coordonnées trichromatiques (division par zéro) car il ne contient pas d'information chromatique et le blanc de référence W a pour coordonnées trichromatiques $(1/3, 1/3, 1/3)$.

D'après (24), (25) et (26), les primaires $[A]$, $[B]$, $[C]$ et les couleurs dérivées $[A_c]$, $[B_c]$, $[C_c]$ ont les *mêmes* coordonnées trichromatiques :

$$(1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1) .$$

9.3 Diagramme de chromaticité

Comme seulement deux coordonnées trichromatiques suffisent à décrire la chrominance d'une couleur, on va pouvoir représenter cette chrominance dans un espace à deux dimensions. Il existe une infinité de manières d'obtenir cet espace à deux dimensions. On peut par exemple choisir le plan de Maxwell. On peut aussi projeter le plan de Maxwell sur n'importe quel espace à deux dimensions. Le diagramme de chromaticité correspond à la projection du plan de Maxwell sur le plan formé par deux des trois vecteurs \vec{A}_c , \vec{B}_c , \vec{C}_c en suivant la direction du troisième vecteur ; par exemple sur le plan $(O, \vec{A}_c, \vec{B}_c)$ selon la direction \vec{C}_c (cf. figure 11).

On a l'habitude de représenter sur le plan de chromaticité le lieu des points correspondant aux couleurs pures issues des spectres monochromatiques pour λ variant entre 380 et 780 nm. Ce lieu est appelé *spectrum locus* et a plus ou moins la forme d'un fer à

cheval. Le spectrum locus est très simple à obtenir à partir des fonctions colorimétriques $A_c(\lambda)$, $B_c(\lambda)$ et $C_c(\lambda)$. D'après la section 7, ces fonctions représentent les pondérations des couleurs $[A_c]$, $[B_c]$, $[C_c]$ nécessaires pour obtenir une couleur équivalente au spectre monochromatique de longueur d'onde λ . Autrement dit, si E_λ est ce spectre monochromatique, on a :

$$[E_\lambda] \equiv A_c(\lambda)[A_c] + B_c(\lambda)[B_c] + C_c(\lambda)[C_c]$$

ou encore :

$$\vec{E}_\lambda = A_c(\lambda)\vec{A}_c + B_c(\lambda)\vec{B}_c + C_c(\lambda)\vec{C}_c.$$

Les coordonnées trichromatiques associées à la couleur pure $[E_\lambda]$ sont alors :

$$a_c = \frac{A_c(\lambda)}{A_c(\lambda) + B_c(\lambda) + C_c(\lambda)} \quad b_c = \frac{B_c(\lambda)}{A_c(\lambda) + B_c(\lambda) + C_c(\lambda)} \quad c_c = \frac{C_c(\lambda)}{A_c(\lambda) + B_c(\lambda) + C_c(\lambda)}.$$

La projection de ces coordonnées sur le plan $(O, \vec{A}_c, \vec{B}_c)$ selon la direction \vec{C}_c donne les coordonnées :

$$(a_c, b_c) = \left(\frac{A_c(\lambda)}{A_c(\lambda) + B_c(\lambda) + C_c(\lambda)}, \frac{B_c(\lambda)}{A_c(\lambda) + B_c(\lambda) + C_c(\lambda)} \right)$$

qui sont donc les coordonnées chromatiques de la couleur pure associée à E_λ . Pour obtenir l'ensemble du spectrum locus, il suffit alors de faire varier λ entre 380 et 780 nm.

On relie ensuite par une droite les deux points extrêmes de ce lieu (correspondant à $\lambda = 380$ nm et $\lambda = 780$ nm). Cette droite est appelée droite des pourpres (elle correspond aux mélanges entre violet et rouge). La chrominance de l'ensemble des couleurs que l'œil peut percevoir est alors comprise à l'intérieur de la courbe fermée obtenue. Si on projette le triangle de Maxwell dans le diagramme de chromaticité (zone achurée sur le schéma), on obtient l'ensemble des chrominances physiquement réalisables avec les primaires.

10 Espace CIE-RGB

Les trois primaires de l'espace CIE-RGB sont monochromatiques :

- un rouge R de longueur d'onde $\lambda = 700$ nm,
- un vert G de longueur d'onde $\lambda = 546,1$ nm,
- un bleu B de longueur d'onde $\lambda = 435,1$ nm.

D'un point de vue mathématique, le rouge correspond à un dirac *unitaire* centré sur 700 nm : $\delta(\lambda - 700)$ (idem pour le vert et le bleu en 546,1 et 435,1 nm). Une couleur $[E]$ est alors définie par rapport aux primaires $[R]$, $[G]$, $[B]$ par :

$$[E] \equiv r_E [R] + g_E [G] + b_E [B]$$

Le blanc W de référence est l'illuminant equi-énergétique E. Pour obtenir un blanc perçu de manière identique avec ces primaires, il faut les mélanger de la manière suivante :

$$[W] \equiv 1.0000 [R] + 4.5907 [G] + 0.0601 [B]$$

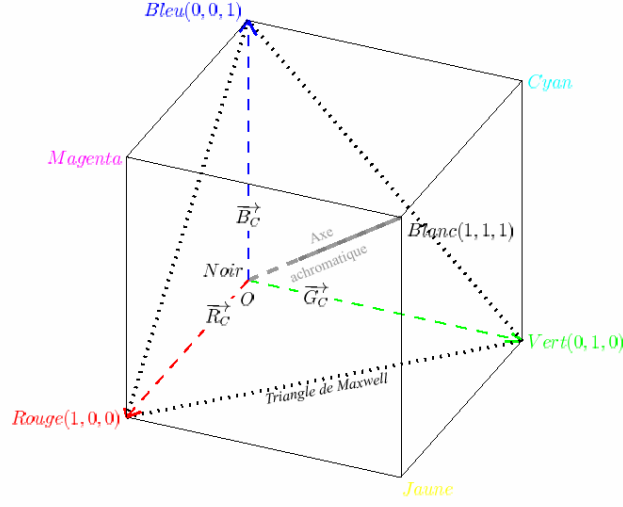


FIG. 12 – Cube de couleur dans le repère orthonormé $(O, \vec{R}_c, \vec{G}_c, \vec{B}_c)$ de l'espace CIE- RGB . Extrait de [http ://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html](http://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html)

autrement dit :

$$a_W = 1.0000 \quad b_W = 4.5907 \quad c_W = 0.0601$$

L'espace de couleur CIE- RGB a pour base trichromatique les trois vecteurs :

$$\vec{R}_c = a_W \vec{R} \quad \vec{G}_c = b_W \vec{G} \quad \vec{B}_c = c_W \vec{B}$$

D'après la section 9.1, les composantes trichromatiques R_c, G_c, B_c de la couleur $[E]$ sont donc les composantes du vecteur \vec{E} dans la base $(\vec{R}_c, \vec{G}_c, \vec{B}_c)$:

$$\vec{E} = R_c \cdot \vec{R}_c + G_c \cdot \vec{G}_c + B_c \cdot \vec{B}_c$$

La figure 12 représente l'espace de couleur CIE- RGB obtenu dans le repère $(O, \vec{R}_c, \vec{G}_c, \vec{B}_c)$ choisi comme étant orthonormé. Le triangle de Maxwell est également représenté. La figure 13 représente les couleurs de la surface du cube réalisables avec ces primaires (i.e. composantes trichromatiques positives). Les autres couleurs réalisables (plus sombres) sont situées à l'intérieur du cube.

On peut vérifier que le blanc de référence est bien en $(1, 1, 1)$ et que les vecteurs de base $\vec{R}_c, \vec{G}_c, \vec{B}_c$ ont pour composantes trichromatiques $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Les couleurs rouge, verte et bleue qui apparaissent en toutes lettres sur la figure correspondent aux primaires dont l'intensité a été poussée au maximum par rapport au blanc de référence :

$$rouge \equiv [R_c] \equiv a_W [R] \quad vert \equiv [G_c] \equiv b_W [G] \quad bleu \equiv [B_c] \equiv c_W [B]$$

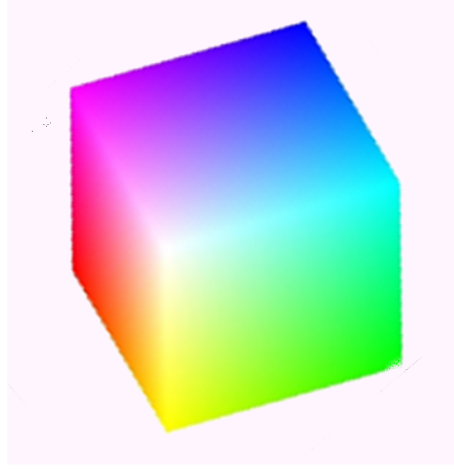


FIG. 13 – Couleurs de la surface du cube de couleur. Extrait de [http ://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html](http://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html)

La droite passant par les points noir $O(0,0,0)$ et blanc $W(1,1,1)$ est appelée *axe des gris*. Elle représente l'ensemble des nuances de gris allant du noir au blanc de référence.

La figure 7 page 13 donne les fonctions colorimétriques $R_c(\lambda)$, $G_c(\lambda)$, $B_c(\lambda)$ de l'espace CIE-RGB. Rappelons que les composantes trichromatiques d'une couleur $[E]$ de spectre $E(\lambda)$ sont données par :

$$R_c = \int_{\lambda} R_c(\lambda)E(\lambda)d\lambda \quad G_c = \int_{\lambda} G_c(\lambda)E(\lambda)d\lambda \quad B_c = \int_{\lambda} B_c(\lambda)E(\lambda)d\lambda$$

Chacune des courbes $R_c(\lambda)$, $G_c(\lambda)$, $B_c(\lambda)$ à une aire égale à 1. Par conséquent, les composantes trichromatiques du blanc de référence qui est l'illuminant E (spectre équiténergique tel que $E(\lambda) = 1 \forall \lambda$) sont :

$$R_c = \int_{\lambda} R_c(\lambda)E(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda} R_c(\lambda)d\lambda = 1 \quad G_c = \dots = 1 \quad B_c = \dots = 1$$

On retrouve bien le fait que les composantes trichromatiques du blanc de référence sont $(1, 1, 1)$.

Les coordonnées trichromatiques dans l'espace CIE-RGB sont :

$$r_c = \frac{R_c}{R_c + G_c + B_c} \quad g_c = \frac{G_c}{R_c + G_c + B_c} \quad b_c = \frac{B_c}{R_c + G_c + B_c} . \quad (27)$$

Le diagramme de chromaticité de l'espace CIE-RGB est représenté sur la figure 14. Ce diagramme correspond à la projection du plan de Maxwell sur le plan $(O, \vec{R}_c, \vec{G}_c)$ selon la direction \vec{B}_c . La zone achurée correspond à la projection du triangle de Maxwell et représente la chrominance des couleurs physiquement réalisables avec les primaires R ,

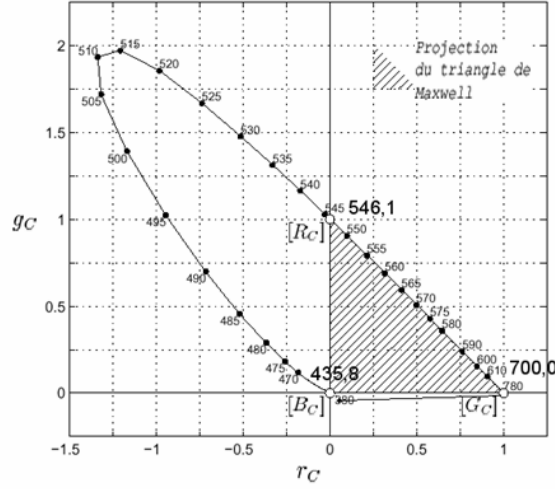


FIG. 14 – Diagramme de chromaticité CIE-RG. Extrait de <http://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html>

G , B . Le spectre locus est également représenté ainsi que la droite des pourpres qui referme le spectre locus. L'ensemble des chrominances perceptibles par l'œil humain est comprise à l'intérieur de cette courbe fermée. On constate qu'un grand nombre de chrominances ne sont pas physiquement réalisables avec ces primaires car en dehors du triangle.

L'espace de couleur CIE-RGB a été construit de manière à ce que :

$$V(\lambda) = R_c(\lambda) + G_c(\lambda) + B_c(\lambda) . \quad (28)$$

La luminance (sensation de luminosité pour l'œil humain) d'une source E de spectre $E(\lambda)$ dépend donc d'un mélange des trois fonctions colorimétriques, ce qui revient à dire que dans cet espace les notions de luminance et de chrominance ne sont pas mathématiquement séparées :

$$\begin{aligned} Y &= \int_{\lambda} (R_c(\lambda) + G_c(\lambda) + B_c(\lambda)) E(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\lambda} R_c(\lambda) E(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda} G_c(\lambda) E(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda} B_c(\lambda) E(\lambda) d\lambda \\ &= R_c + G_c + B_c \\ &= a_W r_E + b_W g_E + c_W b_E . \end{aligned}$$

Rappelons que r_E , g_E et b_E sont les coordonnées absolues de $[E]$ par rapport aux primaires $[R]$, $[G]$, $[B]$. Autrement dit, on a :

$$Y = 1.0000 r_E + 4.5907 g_E + 0.0601 b_E . \quad (29)$$

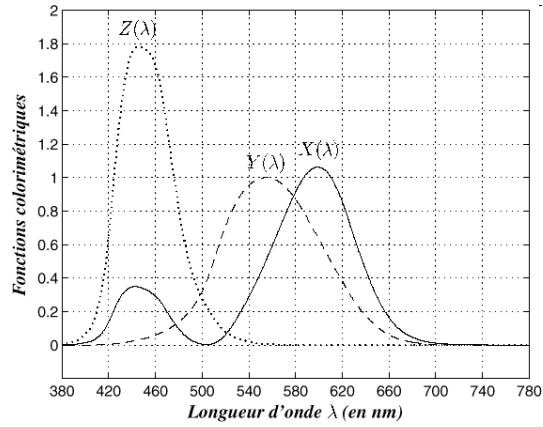


FIG. 15 – Fonctions colorimétriques $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, $Z(\lambda)$. Extrait de <http://perso.univ-lr.fr/pcourtet/html/cours/ima/image.html>

11 Espaces virtuels

11.1 Espace CIE-XYZ

Contrairement à l'espace CIE-RGB présenté précédemment, l'espace de référence CIE-XYZ a été développé en 1931 de manière à ce que :

- les coordonnées et les composantes trichromatiques soient toujours positives,
- il y ait une équivalence entre $V(\lambda)$ et la fonction colorimétrique $Y(\lambda)$, ce qui permettra de représenter la luminance selon l'axe Y de cet espace.

Cet espace a été construit formellement à partir de l'espace CIE-RGB via une matrice de passage (cf. section 13). Il est dit virtuel car les primaires $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ ne sont pas réalisables physiquement (leur spectre est en partie négatif).

Le blanc de référence est l'illuminant E (spectre equi-énergétique). L'espace CIE-XYZ est d'emblée normalisé par rapport à ce blanc⁴. Les primaires imaginaires $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ donnent donc directement les composantes trichromatiques X , Y , Z de chaque couleur $[E]$:

$$[E] \equiv X [X] + Y [Y] + Z [Z]$$

ou encore en notation vectorielle dans la base trichromatique $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ associée aux primaires :

$$\vec{E} \equiv X \vec{X} + Y \vec{Y} + Z \vec{Z} .$$

puisque $\vec{X} = 1.\vec{X} + 0.\vec{Y} + 0.\vec{Z}$, dans cette base les composantes des vecteurs \vec{X} , \vec{Y} , \vec{Z} sont :

$$\vec{X} = [1\ 0\ 0]^t \quad \vec{Y} = [0\ 1\ 0]^t \quad \vec{Z} = [0\ 0\ 1]^t .$$

⁴Donc avec les notations employées dans les sections précédentes, on devrait plutôt écrire $[X_c]$ à la place de $[X]$, $[Y_c]$ à la place de $[Y]$, etc.

Les fonctions colorimétriques $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, $Z(\lambda)$ sont représentées sur la figure 15. On peut vérifier qu'elles sont positives, ce qui implique que les composantes trichromatiques X , Y , Z sont forcément positives pour toutes les couleurs $[E]$ puisque :

$$\begin{aligned} X &= \int_{\lambda} X(\lambda)E(\lambda)d\lambda \\ Y &= \int_{\lambda} Y(\lambda)E(\lambda)d\lambda \\ Z &= \int_{\lambda} Z(\lambda)E(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

L'aire des trois fonctions colorimétriques vaut 1 (comme pour l'espace CIE-RGB) donc après intégration le blanc de référence a bien pour coordonnées (1,1,1) vu que, dans ce cas, $E(\lambda) = 1 \forall \lambda$. De plus, on a :

$$Y(\lambda) = V(\lambda) . \quad (30)$$

La luminance d'une couleur $[E]$ est donc donnée par sa composante trichromatique Y car :

$$\begin{aligned} \text{composante trichromatique : } Y &= \int_{\lambda} Y(\lambda)E(\lambda)d\lambda \\ \text{luminance : } Y &= \int_{\lambda} V(\lambda)E(\lambda)d\lambda . \end{aligned}$$

Les coordonnées trichromatiques de $[E]$ sont :

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \quad y = \frac{Y}{X+Y+Z} \quad z = \frac{Z}{X+Y+Z} .$$

et comme $x + y + z = 1$, on écrit généralement :

$$x = X/(X+Y+Z) \quad y = Y/(X+Y+Z) \quad z = 1 - x - y . \quad (31)$$

Le point correspondant à (x, y, z) est toujours situé à l'intérieur du triangle de Maxwell puisque les composantes trichromatiques X , Y , Z sont positives. Les sommets du triangle de maxwell dans le repère $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ sont les points de coordonnées (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1).

Pour le diagramme de chromaticité, la CIE a choisi par convention de représenter la chrominance dans le plan $(0, \vec{X}, \vec{Y})$ avec un repère orthonormé (projection le long de l'axe \vec{Z}). Le blanc de référence est donc situé en $x = y = 1/3$. On obtient alors le très classique diagramme de la figure 16 qui représente les coordonnées chromatiques (x, y) de la totalité des couleurs $[E]$ que l'œil peut percevoir. La répartition des couleurs dans ce diagramme est donnée sur la figure 17. Bien que le dispositif que vous utilisez pour lire ce document soit incapable d'afficher l'ensemble de ces couleurs, la figure 4

page 4 donne une idée de cette répartition en terme colorimétrique. À cause des propriétés énoncées précédemment, on peut constater que le spectrum locus et la droite des pourpres forment une figure entièrement comprise dans la projection du triangle de Maxwell — contrairement à l'espace CIE-RGB. Les coordonnées trichromatiques des illuminants E et D₆₅ sont :

Illuminant	x	y	z
D ₆₅	0,313	0,329	0,358
E	0,333	0,333	0,333

La température de couleur de E est 5400K. L'illuminant D₆₅ n'est pas situé sur la courbe du corps noir. Sa température de couleur proximale (CCT) est 6504K. Sa chrominance est légèrement rosée.

Notons pour finir qu'il est désormais possible de représenter une couleur $[E]$ par sa chrominance et sa luminance : il suffit d'utiliser les coordonnées x et y pour la chrominance et Y pour la luminance. On obtient alors l'espace de couleur CIE-xyY (cf. figure 18). Dans cet espace, la droite des gris est la droite perpendiculaire au point représentant le blanc E de référence. De la même manière, la droite des gris d'un vidéoprojecteur correctement étalonné à 6504K sera perpendiculaire au point D₆₅ de coordonnées $(x, y) = (0.313, 0.329)$. À partir de x , y et Y , on ré-obtient les composantes trichromatiques X , Y , Z en inversant (31) :

$$X = \frac{Y}{y} \times x \quad Y = Y \quad Z = \frac{Y}{y} \times z = \frac{Y}{y} \times (1 - x - y) . \quad (32)$$

11.2 Espaces de couleur CIE-LUV et CIE-LAB

Dans le diagramme de chromaticité CIE-xy, les études de Mac Adam ont montré que des différences de couleurs perçues comme constantes étaient représentées par des ellipses de tailles très différentes selon la teinte considérée (cf. figure 19). Ceci est dû au fait que ce type d'espace est mathématiquement linéaire par rapport à la puissance spectrale (ie. intégration du spectre) alors que la perception humaine de la chrominance ne l'est pas (pas plus que celle de la luminance). Les couleurs situées à l'intérieur d'une ellipse sont jugées identiques alors qu'une couleur située à l'extérieur d'une ellipse est jugée différente de celle au centre de l'ellipse. Comme les ellipses sont toutes différentes, il n'est donc pas possible de définir dans cet espace deux tolérances *uniques* Δx et Δy pour chaque teinte dans une chaîne de reproduction colorimétrique. Le problème est donc de définir un taux *constant* en fonction de la teinte, à partir duquel on commence à percevoir une différence. Ce taux est appelé en anglais JND pour *Just Noticeable Difference*.

Pour définir ce taux, il faut changer d'espace et utiliser les espaces CIE-LUV ou CIE-LAB qui ont été créés par la CIE en 1976. Ces espaces, dits pseudo-uniformes, sont des approximations d'espaces uniformes dans lesquels des différences égales de perceptions se traduisent par des points séparés par des distances égales, ce qui implique que le JND

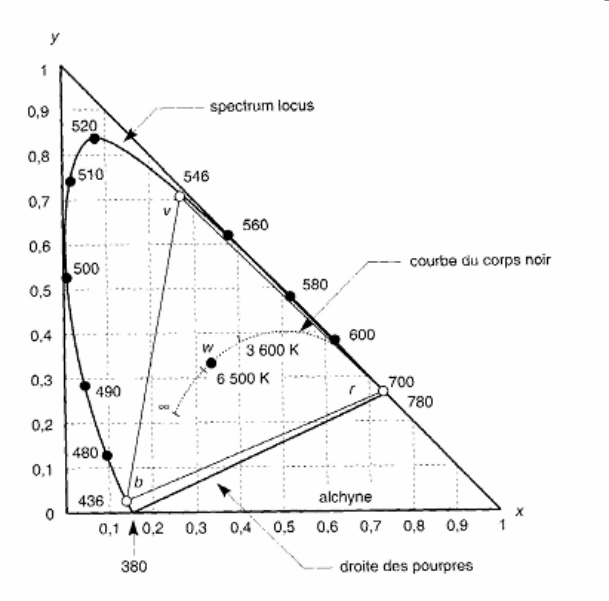


FIG. 16 – Diagramme de chromaticité CIE-xy. Extrait de <http://perso.univ-lr.fr/pcourtrel/html/cours/ima/image.html>

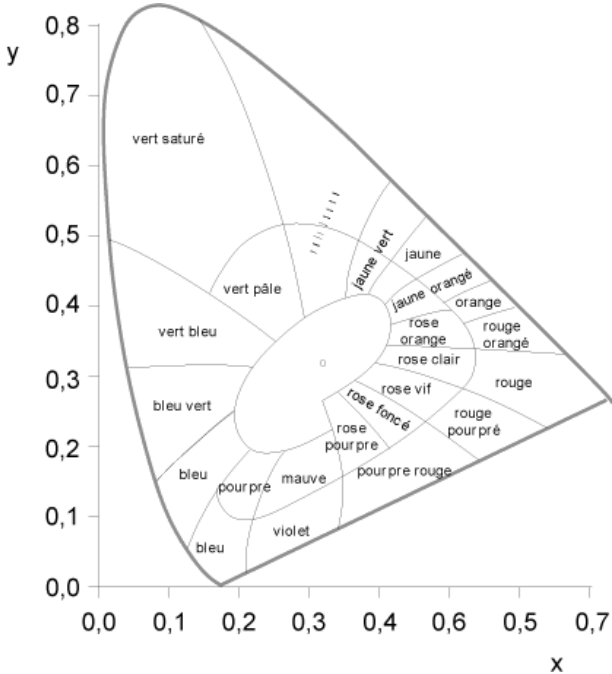


FIG. 17 – Répartition des couleurs dans l'espace CIE-xy. Extrait de <http://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html>

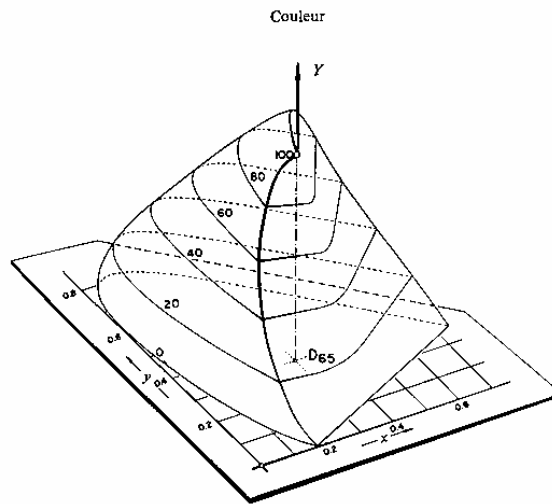


FIG. 18 – Espace de couleur CIE-xyY avec Y normalisé pour varier entre 0 et 100. Extrait de [http ://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html](http://perso.univ-lr.fr/pcourtel/html/cours/ima/image.html)

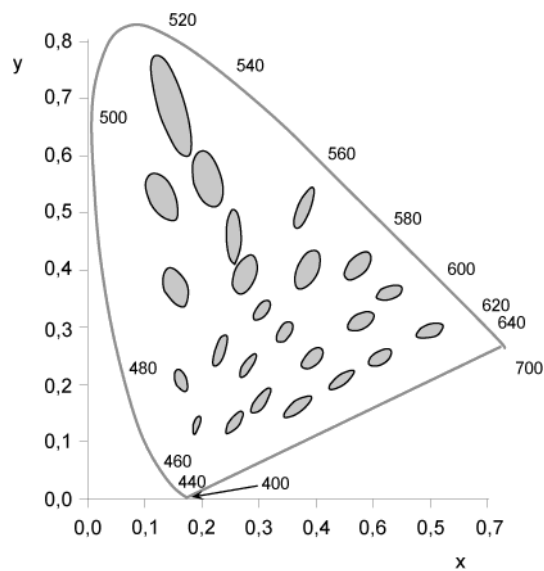


FIG. 19 – Ellipses de Mac Adam dans l'espace CIE-xy. Extrait de [http ://www.cst.fr/dtech/08-juin98/index.html](http://www.cst.fr/dtech/08-juin98/index.html)

est constant sur tout l'espace. L'espace CIE-LUV est beaucoup utilisé pour étalonner les moniteurs mais ne satisfait pas d'autres industries, comme celles des pigments (peintures) qui utilisent l'espace CIE-LAB. Ce dernier est en outre légèrement plus uniforme.

Ces deux espaces utilisent les mêmes primaires imaginaires que CIE-XYZ et se déduisent de ce dernier par des transformations non linéaires.

11.2.1 CIE-LUV

Dans cet espace, les coordonnées d'une couleur sont données par les coordonnées (L^*, u^*, v^*) définies à partir des composantes trichromatique (X, Y, Z) et du blanc de référence choisi (X_W, Y_W, Z_W) qui peut être, par exemple, l'illuminant D₆₅ :

$$L^* = \begin{cases} 116 \left(\frac{Y}{Y_W} \right)^{\frac{1}{3}} - 16 & \text{si } \frac{Y}{Y_W} > 0.008856 \\ 903.3 \frac{Y}{Y_W} & \text{sinon} \end{cases} \quad (33)$$

$$u^* = 13 L^* (u' - u'_W) \quad (34)$$

$$v^* = 13 L^* (v' - v'_W) \quad (35)$$

avec

$$u' = \frac{4X}{X + 15Y + 3Z} \quad v' = \frac{9Y}{X + 15Y + 3Z} . \quad (36)$$

11.2.2 CIE-LAB

Dans cet espace, les coordonnées d'une couleur sont données par les coordonnées (L^*, a^*, b^*) . L^* est définie par la même relation que dans l'espace CIE-LUV et a^*, b^* sont obtenues par :

$$a^* = 500 \left(f \left(\frac{X}{X_W} \right) - f \left(\frac{Y}{Y_W} \right) \right) \quad (37)$$

$$b^* = 200 \left(f \left(\frac{Y}{Y_W} \right) - f \left(\frac{Z}{Z_W} \right) \right) \quad (38)$$

avec

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{si } x > 0.008856 \\ 7.787x + \frac{16}{116} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (39)$$

L^* est appelée clarté en français et lightness en anglais. Elle traduit la sensation qu'une source apparaît plus ou moins lumineuse en regard d'une surface pareillement illuminée perçue comme blanche. C'est donc une grandeur relative à une surface perçue comme blanche (alors que la luminance L est une grandeur absolue associée au terme de brightness). Les autres termes permettent de définir rigoureusement les notions de teinte, de chroma, de coloration, de saturation, etc. qui ont tous été définis et normalisés par la CIE.

11.2.3 Différence de couleur

À partir de l'espace CIE-LUV, on peut définir l'écart ΔE entre deux couleurs (L_1^*, u_1^*, v_1^*) et (L_2^*, u_2^*, v_2^*) par la distance euclidienne :

$$\Delta E = \sqrt{\Delta L^{*2} + \Delta u^{*2} + \Delta v^{*2}} \quad (40)$$

avec

$$\Delta L^* = L_2^* - L_1^* \quad \Delta u^* = u_2^* - u_1^* \quad \Delta v^* = v_2^* - v_1^* .$$

On peut également procéder de même avec l'espace CIE-LAB. Si les clartés des deux couleurs sont égales, l'écart se résume à :

$$\Delta E = \sqrt{\Delta u^{*2} + \Delta v^{*2}} , \quad (41)$$

mais cette quantité dépend tout de même de $L^* = L_1^* = L_2^*$ à cause des relations (34) et (35). Avec cette distance, on peut qualifier qualitativement un écart entre une couleur donnée $[C_1]$ et sa reproduction $[C_2]$ de la manière suivante :

ΔE	qualité de reproduction
< 1	limite de la perception humaine
1 à 3	très bonne qualité de reproduction
3 à 6	bonne qualité de reproduction
6 à 10	acceptable
> 10	insuffisante

En vidéoprojection, le rendu colorimétrique pour toute distance inférieure à 3 sera jugé excellent, 5 sera bien et après la dégradation commencera à s'opérer. La distance ΔE est notamment utilisée pour qualifier la qualité de la reproduction de l'échelle de gris. Le blanc de référence étant D_{65} en vidéoprojection, toute l'échelle de gris est située perpendiculairement au point $(x, y) = (0.313, 0.329)$ dans l'espace CIE-xyY (cf. figure 18). Par conséquent, toute l'échelle de gris doit avoir une température de couleur proximale (CCT) de 6504K. Mais d'après la section 4, si une couleur a une CCT de 6504K, cela veut simplement dire qu'elle est située sur la courbe iso-CCT qui se projette sur la courbe du corps noir au point de TC 6504K. Cette couleur pourra donc très bien tirer soit sur le vert (si elle est située au dessus de la courbe du corps noir), soit sur le magenta (si elle est située en dessous et donc en direction de la droite des pourpres). Autrement dit, une échelle de gris peut très bien avoir une CCT de 6504K et avoir des écarts de chrominance sévères tout le long de l'échelle ! C'est pourquoi, il est impératif de calculer la distance $\Delta E_{D_{65}}$ entre chaque niveau de gris et le point D_{65} avec la relation (41) pour s'assurer que les points correspondant ne s'écartent pas trop de la perpendiculaire à D_{65} le long de l'axe \tilde{Y} . La validité d'un étalonnage de l'échelle de gris doit donc se traduire par deux informations :

- la température de couleur en fonction de chaque gris entre le noir et le blanc D_{65} ,
- la valeur de $\Delta E_{D_{65}}$ pour chaque gris.

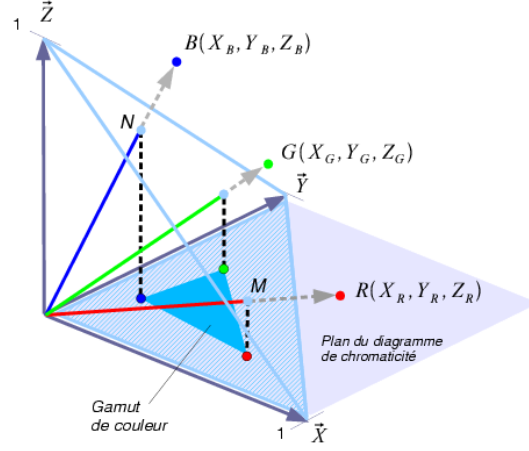


FIG. 20 – Construction du gamut de couleur à partir des primaires $[R]$, $[G]$, $[B]$ d'un vidéoprojecteur

12 Gamut de couleur d'un vidéoprojecteur

Tout vidéoprojecteur possède trois primaires $[R]$, $[G]$, $[B]$ non monochromatiques dont les spectres associés dépendent de celui de la lampe et des éléments présents dans le bloc optique (filtres, etc.). Dans l'espace CIE-XYZ, les composantes trichromatiques de ces primaires sont (X_R, Y_R, Z_R) , (X_G, Y_G, Z_G) , (X_B, Y_B, Z_B) avec :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= X_R \vec{X} + Y_R \vec{Y} + Z_R \vec{Z} , \\ \vec{G} &= X_G \vec{X} + Y_G \vec{Y} + Z_G \vec{Z} , \\ \vec{B} &= X_B \vec{X} + Y_B \vec{Y} + Z_B \vec{Z} .\end{aligned}$$

Après projection sur le diagramme de chromaticité (cf. figure 20), les coordonnées trichromatiques associées sont (x_R, y_R) , (x_G, y_G) , (x_B, y_B) . Les trois points associés forment un triangle appelé *gamut de couleur*.

Pour comprendre ce que représente le gamut, on va supposer que l'intensité de ces primaires a été préalablement étalonnée pour donner le blanc D_{65} après superposition. Autrement dit :

$$[D_{65}] = 1 \times [R] + 1 \times [G] + 1 \times [B] .$$

On ne peut donc pas avoir un rouge plus intense que $[R]$, idem pour le vert etc. Commençons par caractériser l'ensemble des couleurs $[E]$ qui peuvent être engendrées par les primaires $[R]$ et $[B]$:

$$[E] = \alpha[R] + \beta[B] .$$

Les lois de Grassman pouvant toutes être transposées en notation vectorielle, on obtient :

$$\vec{E} = \alpha \vec{R} + \beta \vec{B} \tag{42}$$

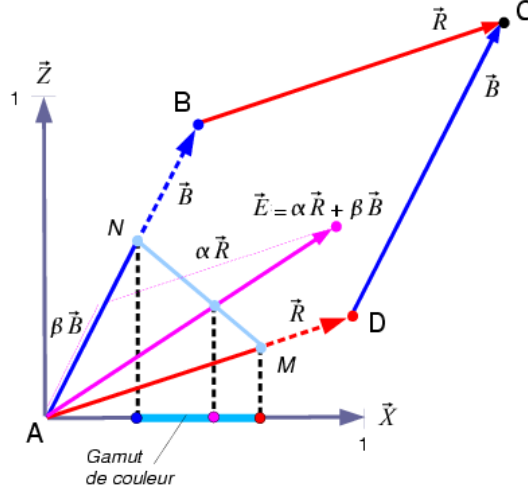


FIG. 21 – Mélange des deux primaires $[B]$ et $[R]$ représenté dans le plan (O, \vec{X}, \vec{Z})

avec α et β qui varient entre 0 et 1 puisque les primaires ont été étalonnées pour donner le blanc. Sur la figure 21, le point correspondant à cette somme vectorielle est forcément situé à l'intérieur du parallélogramme ABCD. Les extrémités du segment $[NM]$ correspondent aux intersections des deux primaires avec le plan de maxwell (cf. figure 20). On constate alors que les coordonnées trichromatiques de $[E]$ appartiennent forcément au segment $[NM]$. La projection de $[NM]$ sur le diagramme de chromaticité correspond à un des côtés du triangle du gamut. Par conséquent, en faisant varier α et β entre 0 et 1, on obtient tous les points constituant ce côté. Ceci signifie que la chrominance d'un mélange quelconque de deux primaires se situe sur le côté correspondant du triangle du gamut. On peut réitérer le même raisonnement pour la chrominance d'un mélange quelconque des trois primaires. Cette chrominance se situe alors forcément à l'intérieur du triangle. Autrement dit, *le gamut représente l'ensemble des chrominances que le vidéoprojecteur peut engendrer par un mélange des primaires $[R]$, $[G]$, $[B]$.*

Exprimée dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$, la relation (42) peut s'écrire :

$$\vec{E} = \alpha \begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z_R \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha X_R + \beta X_B \\ \alpha Y_R + \beta Y_B \\ \alpha Z_R + \beta Z_B \end{bmatrix}$$

ce qui permet de calculer les coordonnées du mélange $\alpha[R] + \beta[B]$ dans le diagramme CIE-xy. On obtient :

$$(x_E, y_E) = (a x_R + b x_B, a y_R + b y_B)$$

avec

$$a = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad b = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

On constate que le diagramme de chromaticité conserve les rapports α et β du mélange des deux primaires. C'est donc un espace de représentation linéaire qui permet de

déterminer graphiquement quelle sera la chrominance de n'importe quel mélange α et β de deux couleurs $[C_1]$ et $[C_2]$: il suffit de tracer un segment entre ces deux couleurs et de reporter les proportions a et b sur ce segment (la somme des deux fait un) pour trouver la chrominance de la couleur $[C]$ résultante. Le diagramme de chromaticité est donc très utilisé car il permet de déterminer de nombreux résultats par simple construction géométrique (couleurs complémentaires, longueur d'onde dominante, blanc de référence, mélange de deux couleurs, pureté, couleurs reproductibles, etc.).

13 Passage d'un espace de couleur à un autre